МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Югорский государственный университет»
НИЖНЕВАРТОВСКИЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИКУМ (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Югорский государственный университет»

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

21.00.00 ПРИКЛАДНАЯ ГЕОЛОГИЯ, ГОРНОЕ ДЕЛО, НЕФТЕГАЗОВОЕ ДЕЛО И ГЕОДЕЗИЯ

специальность
21.02.10 Геология и разведка нефтяных и газовых месторождений

Методические указания к выполнению практических занятий для обучающихся 2 курса очной формы обучения образовательных организаций среднего профессионального образования

Нижневартовск 2017

ББК 221
М 33

РАССМОТРЕНО
На заседании ПЦК «МиЕНД»
Протокол № 11 от 14.12.2017 г.
Председатель
_____________ Р. Х. Шакирова

УТВЕРЖДАЮ
Председатель методического совета
ННТ (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ»
_____________ Р. И. Хайбулина
«19» декабря 2017 г.

Методические указания к выполнению практических занятий ля обучающихся 2 курса очной формы обучения образовательных организаций среднего профессионального образования по ЕН.01 Математика специальности 21.02.10 Геология и разведка нефтяных и газовых месторождений (21.00.00 ПРИКЛАДНАЯ ГЕОЛОГИЯ, ГОРНОЕ ДЕЛО, НЕФТЕГАЗОВОЕ ДЕЛО И ГЕОДЕЗИЯ), разработаны в соответствии с:

1. Федеральным государственным образовательным стандартом специальности 21.02.10 Геология и разведка нефтяных и газовых месторождений, утв. 12.05.2014 г.
2. Рабочей программе учебной дисциплины ЕН. 01 Математика специальности 21.02.10 Геология и разведка нефтяных и газовых месторождений, утвержденной на методическом совете ННТ (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ» 31.08.2017 г.

Разработчик:
Карсакова Елена Николаевна, преподаватель высшей квалификационной категории Нижневартовского нефтяного техникума (филиала) ФГБОУ ВО «ЮГУ».

Рецензенты:
1. Шакирова Р.Х., преподаватель высшей квалификационной категории Нижневартовского нефтяного техникума (филиала) ФГБОУ ВО «ЮГУ».
2. Фазылова Е.Х., преподаватель БУ ПО «Нижневартовский строительный колледж».

Замечания, предложения и пожелания направлять в Нижневартовский нефтяной техникум (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Югорский государственный университет» по адресу: 628615, Тюменская обл., Ханты-Мансийский автономный округ, г. Нижневартовск, ул. Мира, 37.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к выполнению практических занятий разработаны в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом по специальности СПО 21.02.10 Геология и разведка нефтяных и газовых месторождений и рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика.

Освоение дисциплины ЕН.01 Математика предполагает практическое осмысление ее разделов и тем на практических занятиях, которые ориентированы на развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, необходимой для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования; овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла.

В результате изучения учебной дисциплины ЕН.01 Математика обучающийся должен

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятности и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Комплекс практических занятий является вспомогательным инструментом при формировании у обучающихся общей системы знаний, приобретении необходимых умений и должен способствовать формированию общих компетенций (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.6. Проводить измерения и обрабатывать данные контрольно-измерительных приборов.

ПК 2.2. Разрабатывать геологическую и технологическую документацию на бурение, испытание, эксплуатацию скважин, на проведение геолого-геофизических исследований в скважинах и мероприятий по повышению нефтеотдачи пластов.

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Все работы выполняются в тетради для практических занятий.
2. Работы оформляют чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, внимательно изучите методические указания к работе.
5. Уделите внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение сопроводите краткими пояснениями, указав используемые формулы.
7. Геометрические построения следует выполнять карандашом с помощью чертёжных инструментов.
8. Задания к практическим занятиям имеют 15 вариантов.
9. Каждый обучающийся выполняет свой вариант.

Оценка результатов выполнения практических заданий производится в соответствии с универсальной шкалой:

Процент результативности (правильных ответов)	**Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений**	
	балл (отметка)	**вербальный аналог**
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Номер раздела	Номер и тема занятия	Количество часов	Формируемые компетенции
1	**2**	**3**	**4**
1	Практическое занятие № 1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.	2	ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК7.
2	Практическое занятие № 2. Вычисление определителей второго порядка.	2	ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК5, ОК7.
2	Практическое занятие № 3. Вычисление определителей третьего порядка.	2	ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК7.
2	Практическое занятие № 4. Решение системы 3 линейных уравнений с 3 неизвестными.	2	ПК 2.2, ОК2, ОК3, ОК5, ОК9.
3	Практическое занятие № 5. Методы вычисления пределов функции в точке.	2	ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК7.
3	Практическое занятие № 6. Методы вычисления пределов функции на бесконечности.	2	ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК9.
3	Практическое занятие № 7. Вычисление производных функций при заданном значении аргумента.	2	ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК7.
3	Практическое занятие № 8. Исследование функции и построение графика.	2	ПК 2.2, ОК2, ОК3, ОК5, ОК7.
3	Практическое занятие № 9.Приложения неопределённого интеграла к решению задач.	2	ПК 1.6, ОК1, ОК3, ОК4, ОК7.
3	Практическое занятие № 10. Приложения определённого интеграла к решению задач.	2	ПК 2.2, ОК1, ОК3, ОК4, ОК9.
4	Практическое занятие № 11. Отношения множеств.	2	ПК 1.6, ОК2 -7.
4	Практическое занятие № 12. Выполнение операций над множествами.	2	ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК7.
4	Практическое занятие № 13. Решение комбинаторных задач.	2	ПК 2.2, ОК1, ОК3, ОК5, ОК9.
4	Практическое занятие № 14.Вероятностные методы решения задач.	2	ПК 2.2, ОК1, ОК3, ОК5, ОК7.
4	Практическое занятие № 15. Расчет числовых характеристик случайной величины.	2	ПК 2.2, ОК2, ОК3, ОК4, ОК9.
	ИТОГО:	**30**	

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Цель:

- сформировать умения выполнения действий над комплексными числами в алгебраической форме;
- развить навыки преобразования мнимой единицы;
- закрепить знания о свойствах степени.

Формируемые компетенции: ПК 1.6, ОК2, ОК 3, ОК4, ОК7.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, плакат свойства степени.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме производится по правилам соответствующих действий над многочленами.

Пример 1. Выполнить сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел:

Решение:

1. Сложение комплексных чисел: $z_1 = 4 + 2i, \quad z_2 = 1 + 5i.$

По правилу сложения комплексных чисел получим:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = (4 + 2i) + (1 + 5i) = (4 + 1) + (2 + 5)i = 5 + 7i.$$

2. Вычитание комплексных чисел: $z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = 6 + 3i.$

По правилу вычитания комплексных чисел получим:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i = (3 - 6) + (5 - 3)i = -3 + 2i.$$

3. Умножение комплексных чисел: $z_1 = 5 - 4i, \; z_2 = 3 + 2i.$

По правилу умножения комплексных чисел получим:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (5 - 4i)(3 + 2i) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2i - 4i \cdot 3 - 4i \cdot 2i =$$

$$= 15 + 10i - 12i - 8i^2 = 15 - 2i - 8(-1) = 23 - 2i.$$

4. Деление комплексных чисел: $z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 4 + 5i.$

Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(2 - 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{8 - 10i - 12i + 15i^2}{16 - 25i^2} = \frac{8 - 22i + 15(-1)}{16 - 25(-1)} =$$

$$= \frac{-7 - 22i}{41} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i;$$

Пример 2. Вычислить: $i^{15}, \quad (1 + i)^8$

Решение:

1. Так как $i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$ получим:

$$i^{15} = (i^2)^7 \cdot i = (-1)^7 \cdot i = -1 \cdot i = -i.$$

2. Используя соотношение $(1 + i)^2 = 2i$, получим:

$$(1 + i)^8 = \left[(1 + i)^2\right]^4 = (2i)^4 = 16i^4 = 16(i^2)^2 = 16(-1)^2 = 16.$$

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Выполните сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.

II. Возведите в степень.

Вариант 1.

1. а) $(3+i)+(-3-8i)$; в) $(5+4i)(1+2i)$; б) $(4+5i)-(-2+3i)$; г) $\frac{3-i}{3+i}$.

2. а) i^7; б) $(1+i)^{15}$; в) $i+i^2+i^6+i^8+i^{10}$.

Вариант 2.

1. а) $(5-4i)+(7+4i)$; в) $(8-2i)(8+2i)$; б) $(3+9i)-(1+3i)$; г) $\frac{1-i}{i-2}$.

2. а) i^{23}; б) $(1+i)^{19}$; в) $i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10}$.

Вариант 3.

1. а) $(3+2i)+(5+3i)$; в) $(5-3i)(5+3i)$; б) $(4+3i)-(2+i)$; г) $\frac{4i+1}{3-i}$.

2. а) i^{25}; б) $(1+i)^5$; в) $i+i^3+i^5+i^7+i^9$.

Вариант 4.

1. а) $(7+i)+(7+3i)$; в) $(6+2i)(6-2i)$; б) $(0{,}2+4i)-(0{,}8+2i)$; г) $\frac{5+i}{5-2i}$.

2. а) i^{21}; б) $(1+i)^{14}$; в) $i^7+i^8+i^9+i^{10}+i^{11}$.

Вариант 5.

1. а) $(15+i)+(8+2i)$; в) $(3+4i)(3-4i)$; б) $(1-i)-(7-3i)$; г) $\frac{6-3i}{8+4i}$.

2. а) i^{18}; б) $(1+i)^4$; в) $i+i^4+i^7+i^9+i^{11}$.

Вариант 6.

1. а) $(-2-i)+(1+i)$; в) $(8+i)(8-i)$; б) $(2+i)-(6-2i)$; г) $\frac{2i-1}{7+3i}$.

2. а) i^{27}; б) $(1+i)^{22}$; в) $i^2+i^4+i^8+i^9+i^{10}$.

Вариант 7.

1. а) $(12-i)+(3-5i)$; в) $(3+i)(3-i)$; б) $(5+6i)-(-3-4i)$; г) $\frac{-8-7i}{1+3i}$.

2. а) i^{16}; б) $(1+i)^{16}$; в) $i^5+i^6+i^9+i^{10}+i^{12}$.

Вариант 8.

1. а) $(15+2i)+(9+3i)$; в) $(10+2i)(10-i)$; б) $(1+7i)-(3-i)$; г) $\frac{5+12i}{8-6i}$.

2. а) i^8; б) $(1+i)^{13}$; в) $i+i^2+i^6+i^7+i^8$.

Вариант 9.

1. а) $(4+11i)+(7+9i)$; в) $(-1+6i)(6-i)$; б) $(-7+2i)-(5-i)$; г) $\frac{3+3i}{4-3i}$.

2. а) i^{13}; б) $(1+i)^9$; в) $i^4+i^5+i^9+i^{12}+i^{15}$.

Вариант 10.

1. а) $(-6+2i)+(-6-2i)$; в) $(7+2i)(7-2i)$; б) $(7-3i)-(2+4i)$; г) $\frac{2+9i}{3i-1}$.

2. а) i^{12}; б) $(1+i)^{18}$; в) $i^6+i^8+i^{10}+i^{12}+i^{14}$.

Вариант 11.

1. а) $(0{,}2+0{,}1i)+(0{,}8-1{,}1i)$; в) $(9-4i)(9+4i)$; б) $(21+3i)-(6+i)$; г) $\dfrac{2-3i}{4+5i}$.

2. а) i^{17}; б) $(1+i)^{12}$; в) $i^2+i^3+i^5+i^6+i^{10}$.

Вариант 12.

1. а) $(-8-7i)+(4-3i)$; в) $(1-i)(1+i)$; б) $(4+11i)-(7+9i)$; г) $\dfrac{1+7i}{2+3i}$.

2. а) i^{15}; б) $(1+i)^{10}$; в) $i^4+i^5+i^6+i^7+i^8$.

Вариант 13.

1. а) $(12-i)+(5+14i)$; в) $(3+2i)(2-i)$; б) $(0{,}5-3{,}2i)-(1{,}5-0{,}8i)$; г) $\dfrac{2+9i}{7+8i}$.

2. а) i^{26}; б) $(1+i)^{11}$; в) $i^3+i^5+i^7+i^{11}+i^{13}$.

Вариант 14.

1. а) $(4+2i)+(-4+4i)$; в) $(6-3i)(5-2i)$; б) $(0{,}2-0{,}3i)-(0{,}5+0{,}4i)$; г) $\dfrac{2-2i}{5-2i}$.

2. а) i^{19}; б) $(1+i)^{21}$; в) $i^2+i^4+i^8+i^{10}+i^{16}$.

Вариант 15.

1. а) $(5+5i)+(15-8i)$; в) $(1-9i)(1+9i)$; б) $(6+12i)-(9+4i)$; г) $\dfrac{-3-4i}{2+2i}$.

2. а) i^{22}; б) $(1+i)^{24}$; в) $i+i^3+i^6+i^9+i^{13}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение равным, противоположным, сопряженным, мнимым комплексным числам.
2. Запишите алгебраическую форму комплексного числа.
3. Как выполняются действия над комплексными числами в алгебраической форме?
4. Правило вычисления натуральных степеней мнимой единицы?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Цель:

- сформировать навыки вычисления определителей 2-го порядка;
- развить умение нахождения решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными методом Крамера;
- закрепить знания о способах решения уравнений с одной и двумя переменными.

Формируемые компетенции: ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК5, ОК7.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Определителем матрицы 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ называется число, определяемое равенством:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12};$$

Определитель матрицы 2-го порядка находят по правилу: <u>произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали</u>. Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол. Побочной диагональю называется диагональ, ведущая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Пример 1. Вычислить определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$.

Решение:

Найдём значение определителя по правилу: произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 4 \cdot 1 = -10 - 4 = -14.$$

Пример 2. Найти решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16, \\ 4x - y = 14. \end{cases}$$

Решение:

Для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

единственное решение по правилу Крамера находят следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

По формулам Крамера получаем:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = -11$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 14 & -1 \end{vmatrix} = 16 \cdot (-1) - 14 \cdot 2 = -44$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 3 \cdot 14 - 4 \cdot 16 = -22$

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{-11} = 4$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2.$

Ответ: (4;2)

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Вычислить определитель второго порядка.

II. Найти корни уравнения.

III. Решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера.

Вариант 1.

1. $\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 1+x & 4 \end{vmatrix}$; 2. $x^2 + \begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 3x + 4y = 18, \\ 2x + 5y = 19. \end{cases}$

Вариант 2.

1. $\begin{vmatrix} 8 & x-1 \\ 3 & 4x \end{vmatrix}$; 2. $x^2 + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ x & -4 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 3x + 5y = 14, \\ 2x - 4y = -20. \end{cases}$

Вариант 3.

1. $\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 5x - 2y = 14, \\ 3x + 4y = 25. \end{cases}$

Вариант 4.

1. $\begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ -4 & x \end{vmatrix} = 36$; 3. $\begin{cases} 4x + 3y = -27, \\ 2x - 4y = 14. \end{cases}$

Вариант 5.

1. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2x & -3x \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & -4 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 8x + 4y = 7, \\ 4x + 2y = 9. \end{cases}$

Вариант 6.

1. $\begin{vmatrix} 1/2 & 2 \\ x+1 & 4 \end{vmatrix}$; 2. $x^2 - \begin{vmatrix} 11x & 6 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 4x - 6y = 3. \end{cases}$

Вариант 7.

1. $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}$; 2. $x^2 + \begin{vmatrix} 2x & 11 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 5x - 2y = 7, \\ 3x + 4y = 25. \end{cases}$

Вариант 8.

1. $\begin{vmatrix} 8+x & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ -6x + 9y = 9. \end{cases}$

Вариант 9.

1. $\begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ x-1 & 9 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} x & 2x \\ -2 & x \end{vmatrix} = 32$; 3. $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 5x-y=7. \end{cases}$

Вариант 10.

1. $\begin{vmatrix} 6x & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2x & -3x \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & -4 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 3x-2y=5, \\ 4x+y=14. \end{cases}$

Вариант 11.

1. $\begin{vmatrix} a-1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; 2. $x^2 - \begin{vmatrix} 2x & -9 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 3x-5y=13, \\ 2x+7y=81. \end{cases}$

Вариант 12.

1. $\begin{vmatrix} 4 & a-2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$; 2. $x^2 - \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$; 3. $\begin{cases} 4x+y=17, \\ 3x-5y=7. \end{cases}$

Вариант 13.

1. $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & a-6 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 5x-3y=16, \\ 2x+4y=22. \end{cases}$

Вариант 14.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ a-2 & 4 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2x & 3{,}5x \\ 2 & x \end{vmatrix} = 15$; 3. $\begin{cases} 5x-2y=6, \\ 7x-5y=4. \end{cases}$

Вариант 15.

1. $\begin{vmatrix} 6 & -7a \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2x & -3x \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & -4 \\ 4 & x \end{vmatrix}$; 3. $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 6x-4y=2. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называют определителем второго порядка?
2. Сформулируйте правило вычисления определителя второго порядка.
3. Запишите формулы Крамера для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Цель:

- сформировать навыки вычисления определителей 3-го порядка методом разложения по элементам первой строки и по правилу треугольников;
- развить умение преобразования определителя по его свойствам;
- закрепить знания о действиях с числами противоположных знаков.

Формируемые компетенции: ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК7.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

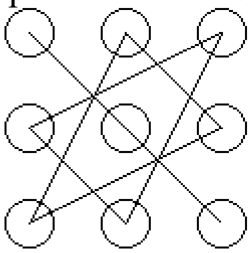
Краткие теоретические сведения:

Определителем матрицы третьего порядка называется число, определяемое равенством:

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из шести слагаемых. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Каждое слагаемое состоит из произведения трех сомножителей.



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

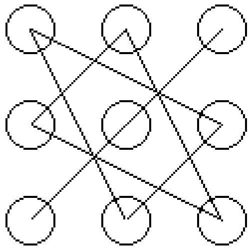


Рисунок 1.1 Рисунок 1.2

Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу нахождения определителя третьего порядка можно определить, пользуясь приведенной схемой, которая называется правилом треугольников или правилом Сарруса. Первые три слагаемые берутся со знаком плюс и определяются из рисунка (1.1.), а последующие три слагаемые берутся со знаком минус и определяются из рисунка (1.2).

Пример 1. Вычислить определитель третьего порядка по правилу Сарруса:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\Delta = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0$$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка методом разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

Решение:

Используем формулу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3(-5 + 16) - 2(1+32) +$$
$$+2(2 + 20) = = 33 - 66 + 44 = 11.$$

Рассмотрим основные свойства определителей:

- Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.
- Если у матрицы умножить любую строку (любой столбец) на какое-либо число, то определитель матрицы умножится на это число.
- Определитель не меняется при транспонировании матрицы.
- Определитель меняет знак при перестановке любых двух строк (столбцов) матрицы.
- Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.
- Определитель не меняется, если к какой-нибудь строке прибавить любую другую строку, умноженную на любое число. Аналогичное утверждение справедливо и для столбцов.

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Найдите значение определителя по правилу треугольников (правило Сарруса).

II. Разложите определитель по элементам первой строки и вычислите его.

III. Используя свойства определителя, докажите равенство.

Вариант 1.

1. $\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5x & -2 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 11 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$;

Вариант 2.

1. $\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ -3 & 3 & x \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -7 \\ 2 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0$;

Вариант 3.

1. $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 3x & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 3 & 21 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 21 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

Вариант 4.

1. $\begin{vmatrix} 2x & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & x \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 15 & 18 \end{vmatrix} = 0$;

Вариант 5.

1. $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ x & -5 & -1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 6.

1. $\begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -x & 2 & 4 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 4 & 15 & 6 \\ 7 & -4 & 3 \\ 4 & 15 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 7.

1. $\begin{vmatrix} -x & 5 & 0 \\ 2 & -3x & 1 \\ 4x & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 9 & 6 & 0 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -6 & -7 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 8.

1. $\begin{vmatrix} x & 3 & 2x \\ 4 & 7 & 11 \\ 5x & 10 & 13 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 11 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 9.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ x & -4 & 6 \\ -1 & x & -3 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 15 & 12 & 9 \\ 9 & 6 & 13 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 10.

1. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & x \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 13 & 4 & 5 \\ 13 & 4 & 5 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 11.

1. $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ -4 & -2x & 5 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 2 & 14 & 6 \\ 5 & -3 & -1 \\ 4 & 28 & 12 \end{vmatrix} = 0$.

Вариант 12.

1. $\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ -3 & 3 & x \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 14 & 11 & 8 \\ 1 & -3 & -2 \\ 14 & 11 & 8 \end{vmatrix} = 0.$

Вариант 13.

1. $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 3x & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 13 & 2 & 17 \\ 2 & -4 & -5 \\ 26 & 4 & 34 \end{vmatrix} = 0.$

Вариант 14.

1. $\begin{vmatrix} 2x & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & x \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 19 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & -7 \\ 19 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Вариант 15.

1. $\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5x & -2 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 11 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 26 & 2 & 28 \\ 5 & 3 & -2 \\ 13 & 1 & 14 \end{vmatrix} = 0.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называют определителем третьего порядка?
2. Сформулируйте правило треугольников для вычисления определителя третьего порядка.
3. Запишите формулу разложения определителя третьего порядка по элементам первой строки.
4. Назовите основные свойства определителя.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ 3 ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Цель:

- развить умение преобразования матриц;
- сформировать навыки решения системы 3 линейных уравнений с тремя переменными методами Крамера и Гаусса;
- закрепить знания о свойствах определителей 2 и 3 порядка.

Формируемые компетенции: ПК 2.2, ОК2, ОК3, ОК5, ОК9.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;

2. Выполнить задания;

3. Сделать вывод по работе;

4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Матрицей называется квадратная или прямоугольная таблица, заполненная числами. Эти числа называются элементами матрицы.

Элементы матрицы, расположенные по горизонталям, образуют строки матрицы. Элементы матрицы, расположенные по вертикалям, образуют столбцы матрицы.

Строки нумеруются слева направо, начиная с номера 1, столбцы нумеруются сверху вниз, начиная с номера 1.

Матрица A , имеющая m строк и n столбцов, называется матрицей размера m на n и обозначается $A_{m\cdot n}$. Элемент a_{ij} матрицы $A = \{a_{ij}\}$ стоит на пересечении i - ой строки и j-го столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол. Побочной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Две матрицы считаются равными, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны.

Каждую матрицу можно умножить на любое число, причем, если k – число, то $k \cdot A = \{k \cdot a_{ij}\}$.

Матрицы одного и того же размера $A_{m\cdot n}$ и $B_{m\cdot n}$ можно складывать, причем $A_{m\cdot n} + B_{m\cdot n} = \{a_{ij} + b_{ij}\}$.

Операция сложения матриц обладает свойствами $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Матрицы $A_{m\cdot n}$ и $B_{n\cdot k}$ можно перемножать, причем $A_{m\cdot n} \cdot B_{n\cdot k} = C_{m\cdot k}$, где

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}.$$

Операция умножения матриц обладает свойствами $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$, $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$.

В общем случае $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Пример 1. Выполнив действия над матрицами, найдите матрицу C= 2A-B, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим матрицу 2А размерности 3х3:

$$2A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Вычислим матрицу С = 2А-В размерности 3х3:

$$C = 2A - B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -4 \\ -7 & 0 & 9 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

Свойства матриц и определителей широко применяют при решении системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

где x_1, x_2, x_3– переменные, a_{11}, a_{12},…,a_{33} - числовые коэффициенты. Следует помнить, что при решении системы возможен один из трёх вариантов ответа:

1) система имеет единственное решение – (x_1; x_2; x_3);

2) система имеет бесконечно много решений (не определена);

3) система не имеет решений (несовместна).

Рассмотрим основные методы решения системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

а) Метод Крамера позволяет найти единственное решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, опираясь на умение вычислять определители третьего порядка,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Пример 2. Найти решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 150 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 110 \end{cases}$$

Решение. Находим определители третьего порядка, используя правило Сарруса или разложение по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 5 & 4 \\ 150 & 3 & 2 \\ 110 & 10 & 9 \end{vmatrix} = -760,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ 1 & 150 & 2 \\ 2 & 110 & 9 \end{vmatrix} = 1350, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 30 \\ 1 & 3 & 150 \\ 2 & 10 & 110 \end{vmatrix} = -1270.$$

Находим решение системы по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x_1 = -\frac{760}{5} = -152, \quad x_2 = \frac{1350}{5} = 270, \quad x_3 = -\frac{1270}{5} = -254$$

Ответ: (- 152; 270; -254)

б) Метод Гаусса - классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований (сложение, вычитание уравнений, умножение на коэффициенты) система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которого последовательно, начиная с последних по номеру переменных, находятся все остальные переменные.

Пример 3.

Покажем, как методом Гаусса можно решить следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Во – первых, обнулим коэффициенты при x_1 во втором и третьем уравнениях. Для этого вычтем почленно из второго уравнения системы первое уравнение, умноженное на 2, и из третьего уравнения – первое, умноженное на 3. Имеем:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_2 + x_3 = 1, \\ -6x_2 - 2x_3 = -10. \end{cases}$$

Во – вторых, обнулим коэффициент при x_2 в третьем уравнении. Для этого вычтем из третьего уравнения второе, умноженное на 2. Получим легко решаемую систему треугольного вида:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_2 + x_3 = 1, \\ -4x_3 = -12. \end{cases}$$

В самом деле, из третьего уравнения находим значение $x_3 = 3$, подставляем его во второе уравнение и находим значение $x_2 = ⅔$. Решаем первое уравнение и находим $x_1 = 1$.

Таким образом, исходная система решена.

Ответ: (1; ⅔; 3).

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Найти матрицу преобразования.

II. Решить систему методом Крамера.

III. Решить систему методом Гаусса.

Вариант 1.

1. $C=A+3B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

Вариант 2.

1. $C=2A-B$,если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$

Вариант 3.

1. $C=3A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

Вариант 4.

1. $C=A - 4B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

Вариант 5.

1. $C= 4A-B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

Вариант 6.

1. $C=A+2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант 7.

1. $C=2A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

Вариант 8.

1. $C=3A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

Вариант 9.

1. $C=A-3B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -2. \end{cases}$

Вариант 10.

1. $C=A-2B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант 11.

1. $C=A+4B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант 12.

1. $C=4A+B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

Вариант 13.

1. $C=A+3B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

Вариант 14.

1. $C=2A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -11. \end{cases}$

Вариант 15.

1. $C=3A+B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -7, \\ 9x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называют матрицей?
2. Какие действия производятся над матрицами?
3. Назовите методы решения систем линейных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Цель:

- сформировать навыки вычисления пределов в точке;
- развить умение раскрывать неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right];\left[\frac{1}{0}\right];\left[\frac{C}{0}\right];$
- закрепить знания о способах разложения многочлена на линейные множители.

Формируемые компетенции: ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК7.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы;

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Предельное значение функции в заданной точке — такая величина, к которой стремится рассматриваемая функция при стремлении её аргумента к данной точке.

Если такой предел существует, то говорят, что функция **сходится** к указанному значению; если такого предела не существует, то говорят, что функция **расходится**.

Отсутствие предела функции (в данной точке) означает, что для любого заранее заданного значения области значений и всякой его окрестности сколь угодно близко от заданной точки существуют точки, значение функции в которых окажется за пределами заданной окрестности.

Если в некоторой точке области определения функции существует предел и этот предел равен значению в данной функции, то функция оказывается **непрерывной** (в данной точке).

Определение 1: Пусть функция f (x) определена в некоторой окрестности точки *a*, кроме самой точки *a*. Число B называют пределом функции f(x) в точке *a*, если для любой последовательности значений аргументов x_1, x_2, x_3, …, x_n, стремящихся к *a*, последовательность соответствующих значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$, сходится к числу B.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, если $x_n \to a$ при $f(x_n) \to B$.

Для предела функции в точке справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то предел суммы функций f(x) и g(x) при x→a равен сумме пределов этих функций, т.е.

$\lim\limits_{x\to a}$ (f(x) ± g(x)) = $\lim\limits_{x\to a}$ f(x) ± $\lim\limits_{x\to a}$ g(x).

Теорема 2. Если f(x) и g(x) имеют пределы при x→a, то предел произведения функций при x→a равен произведению пределов этих функций, т.е.

$\lim\limits_{x\to a}$ (f(x) · g(x)) = $\lim\limits_{x\to a}$ f(x) · $\lim\limits_{x\to a}$ g(x).

Следствие 1. $\lim\limits_{x\to a}$ (C·f(x)) = C · $\lim\limits_{x\to a}$ f(x).

Следствие 2. $\lim\limits_{x\to a}$ C = C.

Теорема 3. Если функции f(x) и g(x) имеют пределы при x→a, причем предел функции g(x) ≠ 0, то имеет место равенство:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Рассмотрим вычисление пределов функций на конкретных примерах.

Пример 1. Найти предел в заданной точке:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8};$$

Решение:

При непосредственной подстановке x = 2 получим неопределенность вида [0/0]. Раскрыть эту неопределенность возможно, разложив числитель и знаменатель на линейные множители по формулам:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Далее сократим дробь на *x – 2* и найдём значение предела при x = 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{2+4}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найти предел в заданной точке:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3};$$

Решение:

В данном случае пределы числителя и знаменателя при $x\to 6$ равны нулю, имеем неопределенность вида [0/0].

Умножаем числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\sqrt{x+3}+3$ и, затем сократив дробь на *x – 6*, получим:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{\left(\sqrt{x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{x+3-9}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{x-6}=\lim_{x\to 6}\sqrt{x+3}+3=\sqrt{6+3}+3=6.$$

Задания для самостоятельного выполнения:

Найти пределы функций в заданных точках.

Вариант 1.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5}{3x-9}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$;

Вариант 2.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x+x^2}{x^2+5x+6}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7}{5x^2-3x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{\sqrt{x+2}-2}$;

Вариант 3.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(4x+3x^2-1\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-11x-3}{3x^2-8x-3}$; 3. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$;

Вариант 4.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-2x+1\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$; 3. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$;

Вариант 5.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\left(3x-4x^2\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$;

Вариант 6.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9}{7x^2+3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{3x}$;

Вариант 7.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{25-x^2}{5-x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-11x-3}{5x^2-16x+3}$; 3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

Вариант 8.

1. $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x^2-36}{x+6}$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{2x^2-7x-4}$; 3. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2}$;

Вариант 9.

1. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{49-x^2}{7-x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$;

Вариант 10.

1. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2-64}{x-8}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

Вариант 11.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-2x-15}{x^2-9}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+4x}{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x/3}$;

Вариант 12.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

Вариант 13.

1. $\lim\limits_{x\to 11}\frac{121x-x^3}{11-x}$; 2. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

Вариант 14.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-16}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to -27}\frac{x+27}{\sqrt[3]{x}+3}$;

Вариант 15.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{x-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{2x^2-7x-4}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x-3}{\sqrt{x+3}-2}$;

Вопросы для самоконтроля:

1. Назовите основные методы вычисления пределов в точке.
2. Сформулируйте теоремы о пределах.
3. Запишите формулу разложения квадратного трёхчлена.
4. Запишите формулы разности квадратов и разности кубов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Цель:

- сформировать навыки вычисления пределов на бесконечности;
- развить умение раскрывать неопределённости вида $[\infty/\infty];[1/\infty];[C/\infty]$;
- закрепить знания о способах деления многочлена на многочлен.

Формируемые компетенции: ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК9.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Предел функции на бесконечности описывает поведение значения данной функции, когда её аргумент становится бесконечно большим.

Определение 1: Число A называется пределом функции f(x) при $x \to \infty$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$, можно найти такое $M > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение:

$\lim\limits_{x\to\infty}$ f(x) = A, если $x_n \to \infty$ при $f(x_n) \to A$.

Справедливы аналогичные теоремы:

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Следствие 1. $\lim\limits_{x\to\infty} (C\cdot f(x)) = C \cdot \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Следствие 2. $\lim\limits_{x\to\infty} C = C$.

Определение 2: Функция называется бесконечно малой, если её предел при $x\to a$ равен нулю и бесконечно большой, если её предел при $x\to a$ равен бесконечности, т.е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то f(x) - бесконечно малая и если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то f(x) - бесконечно большая.

Свойства бесконечно малых:

- Сумма конечного числа бесконечно малых функций — бесконечно малая функция.
- Произведение бесконечно малых функций — бесконечно малая функция.
- Произведение бесконечно малой функции на ограниченную — бесконечно малая функция. Как следствие, произведение бесконечно малой функции на константу — бесконечно малая функция.
- Если *f(x)*— бесконечно малая функция, сохраняющая знак, то 1/*f(x)*— бесконечно большая функция.

Рассмотрим часто встречающиеся методы вычисления пределов функций на бесконечности.

Пример 1. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2 - x}{5x}$;

Решение:

При $x\to\infty$ данная функция представляет собой частное двух бесконечно больших величин, имеем неопределенность вида [∞/∞]. Чтобы раскрыть эту неопределенность, применим первую предельную теорему и разделим каждое слагаемое числителя на 5*x*. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2 - x}{5x} = \lim_{x\to\infty}\frac{10x^2}{5x} - \lim_{x\to\infty}\frac{x}{5x} = 2\lim_{x\to\infty} x - \frac{1}{5} = \infty.$$

Пример 2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{1 + 3x - x^3}$;

Решение:

При $x\to\infty$ имеем неопределенность вида [∞/∞]. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель на x^3. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+1}{1+3x-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3/x^3-x^2/x^3+1/x^3}{1/x^3+3x/x^3-x^3/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-1/x+1/x^3}{1/x^3+3/x^2-1}=$$
$$=\frac{2-1/\infty+1/\infty}{1/\infty+3/\infty-1}=\frac{2-0+0}{0+0-1}=-2.$$

Пример 3. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$;

Решение:

При $x\to\infty$ данная функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин, имеем неопределённость вида $[\infty-\infty]$.Раскроем неопределённость, умножив и разделив функцию на сопряжённое выражение $(x+\sqrt{x^2-4x})$, и при помощи элементарных преобразований получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(x+x\sqrt{1-4/x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(1+\sqrt{1-4/x}\right)}=\frac{4}{2}=2.$$

Задание для самостоятельного выполнения:

Найти пределы функций на бесконечности.

Вариант 1.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-x}{8x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+1}{8x^3+1}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-9x})$;

Вариант 2.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{5x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2-8}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{49x^2-x}-7x)$;

Вариант 3.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+5}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x+x^3}{10x^3+x^2-80}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$;

Вариант 4.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-3x}{6x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+11}{x^2-1+3x^3}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+x}-5x)$;

Вариант 5.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+6}{-3x^3+x^2-26}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2-8x})$;

Вариант 6.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{21x+12}{7x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-4}{x^2-7x-9}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2-x}-4x)$;

Вариант 7.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-8x}{4x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^2-x-6}{3-x^2}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x}-2x)$;

Вариант 8.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11-3x}{9x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^2-5x+4}{20x-5}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{36x^2+x}-6x)$;

Вариант 9.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2+3x}{15x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2-5x})$;

Вариант 10.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x+5}{6x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+2x^2-3x^3}{1-3x+2x^3}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-x}-2x)$;

Вариант 11.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-5x}{3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^6-x^4+8x}{7x-8x^2+6x^6}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+7x}-3x)$;

Вариант 12.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-6x}{8x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+8x-1}{x^2+7x^3+11}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$;

Вариант 13.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+9x}{13x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(4x-\sqrt{16x^2-4x})$;

Вариант 14.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x+21}{3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2-x}-3x)$;

Вариант 15.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11x^2-8x}{25x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+6}{3-5x^2+10x^3}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)$;

Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите основные методы вычисления пределов на бесконечности.
2. Сформулируйте теоремы о пределах.
3. Какая функция является бесконечно малой, бесконечно большой?
4. Назовите свойства бесконечно малых.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ АРГУМЕНТА

Цель:

- сформировать навыки нахождения производных функций по правилам дифференцирования суммы и разности, произведения и частного;
- развить умение вычисления значения производной при заданном значении аргумента;

- закрепить знания о способах преобразования степенных выражений.

Формируемые компетенции: ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК9.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Правила дифференцирования».

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0называется предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю**:**

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

Функция, имеющая конечную производную, называется **дифференцируемой.**

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

Если***y=f(x)*** *и* ***u=φ(x)*** – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции ***y=f (φ(x))*** существует и равна произведению производной функции **y** по промежуточному аргументу ***u*** на производную промежуточного аргумента ***u*** по независимой переменной ***x:***

$$y_x' = y_u' \cdot u_x';$$

Аналогичная формула верна и для сложных функций, которые задаются с помощью цепочки, содержащей три звена и более.

Таблица формул дифференцирования:

1. $c' = 0$ *2.* $x' = 1$, $u' = 1$ *3.* $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4. $(uv)' = u'v + v'u$. *5.* $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$. *6.* $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$.

7. $(kx+b)' = k$ *8.* $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ *9.* $(cu)' = cu'$.

10. $(f(g(x)))' = f'(x)\cdot g'(x)$ *11.* $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

Здесь ***u***и ***v*** -дифференцируемые функции от ***x***, а С – постоянная величина.

Рассмотрим технику вычисления производных функций на примерах.

Пример 1. Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$y = 5x^3 + 2x^2 - 6x + 7, \quad y'(-1);$$

Решение:

1. Применив последовательно правила дифференцирования суммы и

степени: $(u+v)' = u'+v'$; $(x^n)' = nx^{n-1}$, имеем:

$$y' = (5x^3+2x^2-6x+7)' = (5x^3)' + (2x^2) - (6x)' + 7' = 5(x^3)' + 2(x^2)' - 6(x)' + 7' = 5\cdot 3x^2 +$$

$$+2\cdot 2x - 6\cdot 1 + 0 = 15x^2 + 4x - 6;$$

$$y'(-1) = 15(-1)^2 + 4(-1) - 6 = 15 - 4 - 6 = 5$$

Пример 2. Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$y = 2x^3\sqrt{x^2-1}, \quad y'(2);$$

Решение:

Применив правило дифференцирования произведения: $(u\cdot v)' = u'v + uv'$, имеем:

$$y' = \left(2x^3\sqrt{x^2-1}\right)' = (2x^3)'\sqrt{x^2-1} + 2x^3\left(\sqrt{x^2-1}\right)' = 2\cdot 3x^2\sqrt{x^2-1} + 2x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(x^2-1)' =$$

$$= 6x^2\sqrt{x^2-1} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}2x = 6x^2(x^2-1) + 2x^4 = 6x^4 - 6x^2 + 2x^4 = 8x^4 - 6x^2;$$

$$y'(2) = 8\cdot 2^4 - 6\cdot 2^2 = 128 - 24 = 104.$$

Пример 3. Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$y = \frac{x^2-2}{x^2+2}, \quad y'(1).$$

Решение:

Применив правило дифференцирования частного: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, имеем:

$$y' = \left(\frac{x^2-2}{x^2+2}\right)' = \frac{(x^2-2)'(x^2+2) - (x^2-2)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{2x(x^2+2) - (x^2-2)2x}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+4x-2x^3+4x}{(x^2+2)^2} = \frac{8x}{(x^2+2)^2};$$

$$y'(1) = \frac{8\cdot 1}{(1^2+2)^2} = \frac{8}{3^2} = \frac{8}{9}.$$

Задание для самостоятельного выполнения:

Найти производные функций при данном значении аргумента.

Вариант 1.

1. $y(x) = 5x^4 - \frac{2x}{\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{x} + 7; \quad y'(2).$
2. $y(x) = (x+1)\sqrt{x-1}; \quad y'(5).$
3. $y(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}; \quad y'(3)$.

Вариант 2.

1. $y(x)=6x^3-\frac{5x}{\sqrt{x}}+4x^2-12;\quad y'(1).$ 2. $y(x)=(x+2)\sqrt{2x-1};\quad y'(4).$

3. $y(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2};\quad y'(1)$.

Вариант 3.

1. $y(x)=2x^2+\sqrt{x}-4x+11+\frac{1}{x};\quad y'(1).$ 2. $y(x)=(x-1)\sqrt{x^2-1};\quad y'(2).$

3. $y(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x};\quad y'(\sqrt{5})$.

Вариант 4.

1. $y(x)=4x+10-\frac{2x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}};\quad y'(1).$ 2. $y(x)=(x^2+6)\sqrt{x^2-3};\quad y'(3).$

3. $y(x)=\frac{6x}{\sqrt{x^2+1}};\quad y'(\sqrt{3})$.

Вариант 5.

1. $y(x)=3x-\frac{2x}{x\sqrt{x}}+5+\frac{1}{2x};\quad y'(1).$ 2. $y(x)=(x+1)\sqrt{x^2+1};\quad y'(2).$

3. $y(x)=\frac{5x^2+6x+1}{x+1};\quad y'(5)$

Вариант 6.

1. $y(x)=3x^3-2x+2+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x};\quad y'(1).$ 2. $y(x)=(x-1)\sqrt{3x-2};\quad y'(6).$

3. $y(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};\quad y'(4)$.

Вариант 7.

1. $y(x)=4x^2-\frac{2x^2}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}+5;\quad y'(1).$ 2. $y(x)=(x^2+4)\sqrt{x^2-1};\quad y'(2).$

3. $y(x)=\frac{x^3}{\sqrt{8+x^3}};\quad y'(1)$.

Вариант 8.

1. $y(x)=2x+6x^3-\frac{8}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}-6;\quad y'(1).$ 2. $y(x)=(x^2-2)\sqrt{x^2+1};\quad y'(\sqrt{3}).$

3. $y(x)=\frac{\sqrt{4+x^2}}{x};\quad y'(\sqrt{5})$.

Вариант 9.

1. $y(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+3x-2x^2+7;\quad y'(1).$ 2. $y(x)=(x^2+3)\sqrt{x^2-1};\quad y'(\sqrt{2}).$

3. $y(x)=\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}};\quad y'(\sqrt{3})$.

Вариант 10.

1. $y(x)=\sqrt[4]{x^3}-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}+8;\quad y'(1).$ 2. $y(x)=(2x-1)\sqrt{1-2x};\quad y'(2).$

3. $y(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{x}$; $y'(1)$.

Вариант 11.

1. $y(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}+1$; $y'(1)$. 2. $y(x)=\left(x^3-1\right)\sqrt{x^2+x+1}$; $y'(2)$.

3. $y(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; $y'(4)$.

Вариант 12.

1. $y(x)=2x^2-6x+7+\dfrac{5}{\sqrt{x^2}}$; $y'(1)$. 2. $y(x)=\left(x^2-3\right)\sqrt{x+4}$; $y'(3)$.

3. $y(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}$; $y'(1)$.

Вариант 13.

1. $y(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}-\dfrac{5}{2\sqrt{x}}+2x^2-9$; $y'(1)$. 2. $y(x)=\left(3x^2+1\right)\sqrt{2x^2+3}$; $y'(3)$.

3. $y(x)=\dfrac{4+\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$; $y'(1)$.

Вариант 14.

1. $y(x)=2{,}5x-6x^3+3\sqrt{x}-\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$; $y'(1)$. 2. $y(x)=\left(x^2+3x\right)\sqrt{x-4}$; $y'(8)$.

3. $y(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$; $y'(3)$.

Вариант 15.

1. $y(x)=4x^2-3x+\dfrac{x}{2}+\dfrac{6}{\sqrt{x^2}}$; $y'(1)$. 2. $y(x)=(x-4)\sqrt{x-2}$; $y'(3)$.

3. $y(x)=\dfrac{x^2-5}{\sqrt{x}}$; $y'(1)$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Правило дифференцирования суммы и разности двух функций.
2. Сформулируйте правило вычисления производной произведения.
3. Запишите формулу вычисления производной частного двух функций.
4. Как найти производную функции приданом значении аргумента?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

Цель:

- сформировать навыки исследования функций по первой и второй производной;

- развить способность применения результатов исследования к построению графика функции;

- закрепить знания о наибольшем и наименьшем значениях функции.

Формируемые компетенции: ПК 2.2, ОК2, ОК3, ОК5, ОК7.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Правила дифференцирования».

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

1. Исследование функции на монотонность и экстремум.

Возрастающие и убывающие функции называют *монотонными*, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает,- *промежутками монотонности*. Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком её первой производной:

- если в некотором промежутке первая производная $f'(x)>0$, *то функция возрастает в этом промежутке;*

- если в некотором промежутке первая производная $f'(x)<0$, *то функция убывает в этом промежутке.*

Точки минимума и максимума функции называются *точками экстремума* функции. Ими являются только критические точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или терпит разрыв. Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0

экстремум:

~ максимум (max),если производная y' меняет знак с “+” на “-“;

~ минимум (min),если производная y' меняет знак с “-“ на “+”;

~ если знак y' не меняется, то функция не имеет экстремума в данной точке.

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремум:

1. Найти производную функции y'.

2. Приравнять y' к нулю, решить уравнение, найти критические точки.

3. Исключить критические точки из области определения $D(x)$, указать интервалы знакопостоянства y'.

4. На каждом интервале определить знак производной y'.

5. По знаку производной y' установить монотонность функции на интервалах:

при $y' \geq 0$ функция $y = f(x)$ возрастает ↑, при $y' \leq 0$ функция убывает ↓.

6. Найти экстремумы функций, исследуя знак производной y' в окрестности каждой критической точки.

7. Вычислить значения экстремумов в критических точках.

8. Результаты исследования занести в таблицу.

9. Построить схематический график данной функции.

Пример 1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}$ на монотонность и экстремум.

Решение:

1) $y'=(\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3})'=x^2+4x;$

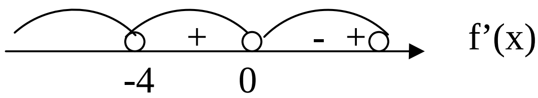
2) $x^2+4x=0$; $x(x+4)=0$; $x_1=0$ или $x_2=-4$;

3) $(-\infty;-4)\cup(-4;0)\cup(0;+\infty)$ - интервалы знакопостоянства;

4) $y'(-5)=(-5)^2+4(-5)=25-20=5\,(+)$;

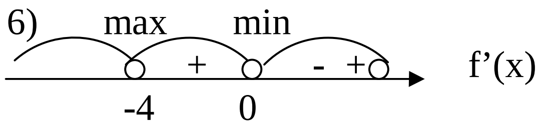
$y'(-1)=(-1)^2+4(-1)=1-4=-3\,(-)$;

$y'(1)=1^2+4\cdot1=1+4=5\,(+)$



5) $x\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)\ (\uparrow)$, $x\in(-4;0)\ (\downarrow)$

6)

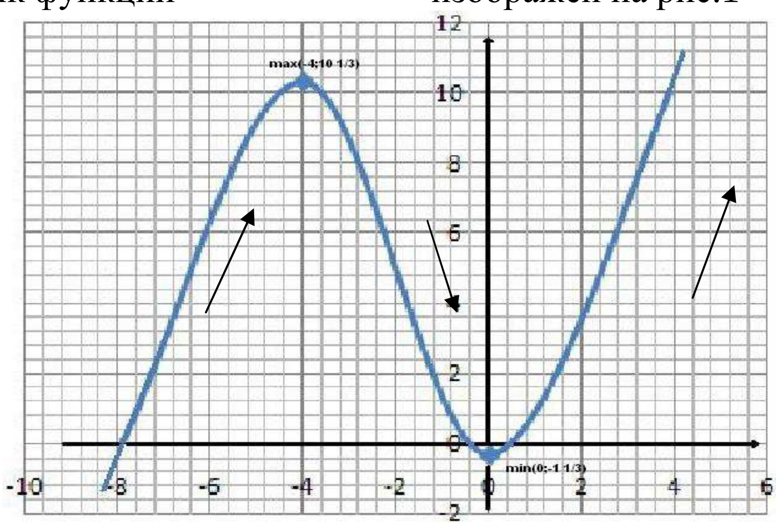


7) $y_{max}=y(-4)=\frac{1}{3}\cdot(-4)^3+2(-4)^2-\frac{1}{3}=10\frac{1}{3}$; $y_{\min}=y(0)=-\frac{1}{3}$.

8) Результаты исследования:

x	$(-\infty;-4)$	-4	(-4;0)	0	$(0;+\infty)$
y'	+	**0**	-	**0**	+
y	$\uparrow$	$\max 10\frac{1}{3}$	$\downarrow$	$\min -\frac{1}{3}$	$\uparrow$

9) График функции $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}$ изображён на рис.1



2. Исследование графика функции на выпуклость и точку перегиба.

Промежутки, в которых график функции обращён выпуклостью вверх или вниз, называются *промежутками выпуклости графика функции.* Выпуклость графика функции *y = f(x)* характеризуется знаком её второй производной:

- если в некотором промежутке вторая производная *f ´´(x)>0, то график функции выпуклый вниз в этом промежутке;*

- если в некотором промежутке вторая производная *f ´´(x)<0, то график функции выпуклый вверх в этом промежутке.*

Точка графика функции *y = f(x),* разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений, называется *точкой перегиба*. Точками перегиба могут служить только критические точки, в которых вторая производная *f ´´(x)* равна нулю или терпит разрыв. Если при переходе через критическую точку x_0 вторая производная*f ´´(x)* меняет знак, то график функции имеет точку перегиба (x_0;y_0).

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точку перегиба:

1. Найти вторую производную функции *y´´*.

2. Приравнять *y´´* к нулю, решить уравнение, найти критические точки.

3. Исключить критические точки из области определения $D(x)$, указать интервалы знакопостоянства *y´´*.

4. На каждом интервале определить знак второй производной *y´´*.

5. По знаку производной *y´´* установить направление выпуклости графика функции: при*y´´*>0 график выпуклый вниз ∪, при *y´´* <0 график выпуклый вверх ∩.

6. Найти точку перегиба, если она существует.

7. Результаты исследования занести в таблицу.

8. Построить схематический график данной функции.

Пример 2. Исследовать функцию $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}$ на выпуклость и точку перегиба.

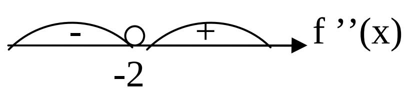
Решение:

1) $y'=(\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3})'=x^2+4x;$ $\quad y''=(x^2+4x)'=2x+4;$

2) *2x + 4 =0; x = -2* – крит. точка

3) $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$

4) $y''(-5)=-5\cdot 2+4=-10+4=-6\,(-)$; $\quad y''(1)=1\cdot 2+4=2+4=6\,(+)$



5) $x\in(-\infty;-2)$ график выпуклый *вверх* $\cap$; $x\in(-4;0)$ график выпуклый вниз $\cup$.

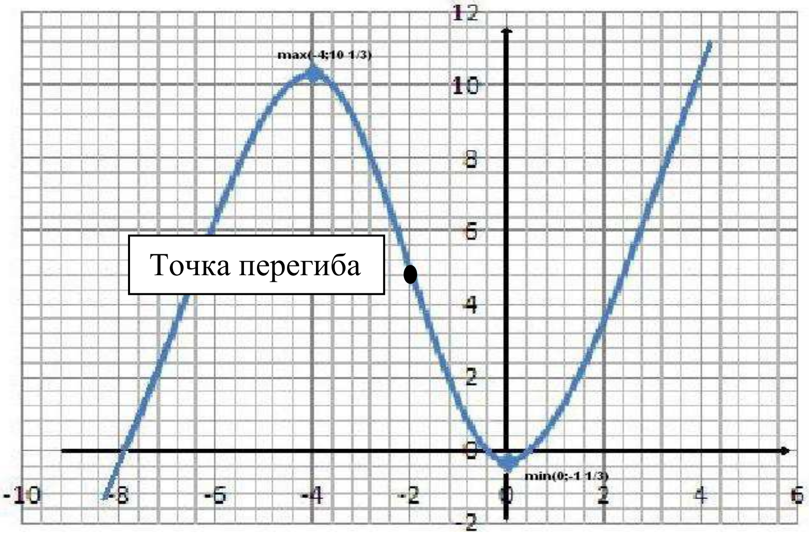
6) Точка перегиба существует при *x = -2*. Найдём ординату этой точки: y(-2)= 5.

Итак, (-2;5) – точка перегиба.

7) Результаты исследования:

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;+\infty)$
y''	**-**	**0**	**+**
y	∩	5	∪

8) График функции $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}$ изображён на рис.2



2. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции *y* = *f(x)*, непрерывной на некотором промежутке [a;b], необходимо:

1. Найти производную функции y'.
2. Найти критические точки – точки, в которых $y' = 0$.
3. Отобрать критические точки, лежащие внутри промежутка [a;b].
4. Вычислить значения функций в выбранных точках и на концах промежутка [a;b].
5. Из полученных значений определить наибольшее и наименьшее значения: y_{max} и y_{min}.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-9x^2+24x-1$ на отрезке [-1;3].

Решение:

1. $y'=(x^3-9x^2+24x-1)'=3x^2-18x+24.$

2. $3x^2-18x+24=0,\ x^2-6x+8=0,\ D=4, x_{1,2}=\frac{6\pm2}{2}=2;4$.

3. Из найденных критических точек внутри отрезка [-1;3] лежит только x = 2.

4. Найдём значения функции $y=x^3-9x^2+24x-1$ в точке x=2 и на концах отрезка [-1;3]: y(-1) = -35, y(2) = 19, y(3) = 17.

5. Очевидно, что $y_{max}(2) = 19$, $y_{min}(-1) = -35$.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.

2. Исследовать функцию на выпуклость и точку перегиба.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.

Вариант 1.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$ 2. $y=x^3-9x^2-24x+12$ 3. $y=x^3-3x^2-9x+35,\quad [-4;4]$.

Вариант 2.

1. $y=\frac{1}{3}x^3+3x^2-\frac{4}{3}$ 2. $y=-x^3+6x^2+24x-5$ 3. $y=-x^3+9x^2-24x+10,\ [0;3]$.

Вариант 3.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6$ 2. $y=x^3-9x^2+24x-1$ 3. $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{1}{3},\ [-2;2]$.

Вариант 4.

1. $y=x^3+3x^2+4$ 2. $y=\frac{2}{3}x^3+4x^2-10$ 3. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4,\ [-4;2]$.

Вариант 5.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+6$ 2. $y=x^3+3x^2+24x-8$ 3. $y=x^4-8x^3+10x^2+1,\ [-1;2]$.

Вариант 6.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$ 2. $y=x^3+3x^2+4$ 3. $y=x^3-3x^2-9x+35,\quad [0;4]$

Вариант 7.

1. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}$ 2. $y=x^3-6x^2+9x-3$ 3. $y=x^4-8x^3+10x^2+1,\ [1;6]$

Вариант 8.

1. $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2-1$ 2. $y=x^3+6x^2+4$ 3. $y=x^3-3x^2-9x+35,\quad [-2;2]$

Вариант 9.

1. $y=-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4$ 2. $y=x^3-6x^2+6x-2$ 3. $y=x^4-8x^3+10x^2+1,\ [-2;3]$

Вариант 10.

1. $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2$ 2. $y=2x^3-9x^2+12x-8$ 3. $y=x^3-3x^2-9x+35,\quad [-2;4]$

Вариант 11.

1. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4$ 2. $y=2x^3-3x^2-12x+8$ 3. $y=x^4-8x^3+10x^2+1,\ [-1;7]$

Вариант 12.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+4$ 2. $y=2x^3+9x^2+12x-2$ 3. $y=-x^3+9x^2-24x+10,\quad [1;5]$

Вариант 13.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+5$ 2. $y=-x^3-9x^2-24x+1$ 3. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4,\ [-3;1]$

Вариант 14.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-4x$ 2. $y=-x^3+6x^2+24x-5$ 3. $y=-x^3+9x^2-24x+10,\ \ [3;6]$

Вариант 15.

1. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ 2. $y=x^3+3x^2+24x-8$ 3. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4,\ [-2;4]$

Вопросы для самоконтроля:

1. Как исследовать функцию на монотонность?
2. Что такое экстремумы функции?
3. Как исследовать функцию на выпуклость и точку перегиба?
4. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9

ПРИЛОЖЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Цель:

- сформировать навыки нахождения функции по её дифференциалу;
- развить умение составлять уравнение кривой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом;
- закрепить знания о физических приложениях неопределённого интеграла.

Формируемые компетенции: ПК 1.6, ОК1, ОК3, ОК4, ОК7.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Таблица интегралов»;

Время выполнения: 2 академических часа;

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Отыскание функции по заданной производной или по дифференциалу - задача неопределённая, так как $\int f(x)dx$ есть множество первообразных функций вида $y=F(x)+C.$ Чтобы из множества первообразных выделить одну определённую функцию, должны быть заданы начальные условия - частные значения *x* и *y*, по которым находят единственное значение С, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Пример 1. Найти функцию по её дифференциалу $dy=\left(4x^3-6x^2+3x-2\right)dx,$ если *y = 2 при x = 3.*

Решение:

Проинтегрируем обе части данного равенства: $\int dy = \int \left(4x^3 - 6x^2 + 3x - 2\right) dx,$ откуда $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + C.$ Найдём значение постоянной C при заданных начальных условиях *y = 2 при x = 3:* $2 = 3^4 - 2\cdot 3^3 + 3^2 - 3\cdot 3 + C,\ откуда\ C = -23.$ Итак, функция, удовлетворяющая заданным начальным условиям, имеет вид: $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 23.$

Пример 2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;-3)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k = 4x - 3$.

Решение:

Согласно условию: $k = \frac{dy}{dx} = 4x - 3, \quad откуда \Rightarrow dy = \left(4x - 3\right) dx.$

Проинтегрировав обе части равенства, получим:

$$\int dy = \int (4x - 3)dx, \quad \int dy = 4\int xdx - 3\int dx, \quad y = 4\frac{x^2}{2} - 3x + C = 2x^2 - 3x + C.$$

Используя начальные условия $x = 2$ и $y = -3$, находим C:

$$-3 = 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + C, \quad -3 = 2 + C, \quad C = -5$$

Следовательно, искомое уравнение кривой имеет вид: $y = 2x^2 - 3x - 5.$

Пример 3. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $V = 6t^2 + 1.$ Найти закон движения, если за время $t = 3с$ точка прошла путь $s = 60м.$

Решение:

Имеем: $ds = vdt = \left(6t^2 + 1\right) dt,$ тогда:

$$s = \int \left(6t^2 + 1\right)dt = 6\int t^2 dt + \int dt = 6\frac{t^3}{3} + t + C = 2t^3 + t + C$$

Подставив в найденное уравнение начальные условия: $s = 60м$, $t = 3с$, получим $60 = 2\cdot 3^3 + 3 + C$, откуда $C = 3.$ Закон движения примет вид: $s = 2t^3 + t + 3.$

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Найти функцию по её дифференциалу.

II. Составить уравнение кривой, проходящей через точку *M (x; y)* с заданнымугловым коэффициентом $k = \frac{dy}{dx}$.

III. Найти закон прямолинейного движения точки.

Вариант 1.

1. $dy = (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx,$ если y = 2 при x = 2.
2. *M (1; 2)* и $dy/dx = 1/2x.$
3. $V = 3t^2 - 2\mathrm{t}$, если *t = 3с при S = 10м*.

Вариант 2.

1. $dy = (8x^3 - 6x^2 - 2x + 4)dx,$ если y = 6 при x = 1.

2. *M (2; 1)* и $dy/dx = 1/2y.$

3. $V = 3t^2 + 4$, если *t = 2с при S = 20м*.

Вариант 3.

1. $dy = \left(8x^4 - 4x^3 + x - 3\right)dx,$ если y = 3 при x = 2.

2. *M (2; 2)* и $dy/dx = 1/4y.$

3. $V = t^2 - 8t + 2$, если *t = 3с при S = 30м*.

Вариант 4.

1. $dy = 4\left(1 + x^2\right)^2 dx,$ если y = 4 при x = 3.

2. *M (1; 3)* и $dy/dx = 1/4x.$

3. $V = 4t - 3t^2$, если *t = 2с при S = 40м*.

Вариант 5.

1. $dy = \left(4x^3 - 2x + \sqrt{x} - 7\right)dx,$ если y = 2 при x = 1.

2. *M (5; -2)* и $dy/dx = 1/2y.$

3. $V = 2t - 3$, если *t = 0с при S = 6м*.

Вариант 6.

1. $dy = \left(3x^2 + \sqrt{x} - 8x + 5\right)dx,$ если y = 5 при x = 1.

2. *M (4 ; 3)* и $dy/dx = 1/3y.$

3. $V = 2\cos t$, если *t =* π */6 с при S = 4м*.

Вариант 7.

1. $dy = \left(6x^5 - 3x^2 + 2x - 2\right)dx,$ если y = 3 при x = 2.

2. *M (3; 1)* и *k=2x-1*.

3. $V = t^2 - 4t + 3$, если *t = 3с при S = 20м*.

Вариант 8.

1. $dy = \left(3\sqrt{x} - 4x^3 + 2x - 3\right)dx,$ если y = 4 при x = 1.

2. *M (0; 3)* и $k = x^2 + 5x.$

3. $V = 8t^3 + 3t^2 - 1$, если *t = 1с при S = 5м*.

Вариант 9.

1. $dy = \left(x^4 - 3x^2 + \sqrt{x} - 9\right)dx,$ если y = 2 при x = 1.

2. *M (2; -1)* и $k = 1/2y.$

3. $V = 3t^2 - 4t - 4$, если *t = 2с при S = 8м*.

Вариант 10.

1. $dy = \left(5x^4 - 3x^2 + 8x - \sqrt{x}\right)dx,$ если y = 5 при x = 1.

2. *M (1; 3)* и *k = 2x-3*.

3. $V=-2\sin t$, если $t = \pi/3$ *с при* $S = 5$*м*.

Вариант 11.

1. $dy=3\left(2x^2-1\right)^2 dx,$ если у = 6 при х = 4.

2. *М (1; 3)* и *k = -2х*.

3. $V=1-10t+3t^2$, если $t = 0$*с при* $S = 10$*м*.

Вариант 12.

1. $dy=\left(8x^2-4x+\sqrt{x}+6\right)dx,$ если у = 3 при х = 1.

2. *М (1; е)* и $dy/dx=x+1$.

3. $V=6t+3t^2$, если $t = 2$*с при* $S = 40$*м*.

Вариант 13.

1. $dy=\left(4x^3-3x^2+4x-8\right)dx,$ если у = 5 при х = 3.

2. *М (-2; -8/3)* и $k=x^2$.

3. $V=3t^2-6t+4$, если $t = 0$*с при* $S = 8$*м*.

Вариант 14.

1. $dy=\left(2x-15x^2+x^4+7\right)dx,$ если у = 3 при х = 2.

2. *М (0; 4)* и *k = 3х-4*.

3. $V=3t^2+4t-1$, если $t = 0$*с при* $S = 0$*м*.

Вариант 15.

1. $dy=\left(6x^2-3x+\sqrt{x}-2\right)dx,$ если у = 4 при х = 1.

2. *М (1; 3)* и $k = 3^{x^2}+2$.

3. $V=4\cos t$, если $t = \pi/6$ *с при* $S = 8$*м*.

Вопросы для самоконтроля:

1. Как найти функцию по её дифференциалу?

2. Опишите алгоритм нахождения уравнения кривой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом.

3. Сформулируйте физические приложения неопределённого интеграла.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Цель:

- сформировать навыки решения физических задач с помощью определённых интегралов;
- развить умение находить площадь плоской фигуры с помощью определённого интеграла.

Формируемые компетенции: ПК 2.2, ОК1, ОК3, ОК4, ОК9.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, стенды «Таблица интегралов».

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

1. Путь, пройденный точкой. Если точка движется прямолинейно и её скорость $v = f(t)$ есть известная функция времени *t*, то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1; t_2]$, вычисляется по формуле:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \qquad (1)$$

Пример 1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v = 0{,}1t^3$ м/с. Вычислить путь, пройденный телом за первые 10с.

Решение. Применяя формулу (1), находим искомый путь:

$$s = \int_0^{10} 0{,}1t^3 dt = \frac{1}{10}\cdot\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^{10} = \frac{1}{40}\cdot 10^4 = 250(м)$$

2. Работа силы. Если переменная сила $F = F(x)$ действует в направлении оси Ох, то работа силы на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x)dx \qquad (2)$$

Пример 2. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 0,06м, если сила 1 Н растягивает ее на 0,01м?

Решение. Согласно закону Гука сила F, растягивающая или сжимающая пружину на *x*м, равна $F = kx$, где k - коэффициент пропорциональности. Из условия следует, $1 = k \cdot 0.01$, т.е. $k = 100$, и, следовательно $F = 100x$. Искомую работу находим по формуле (2):

$$A = \int_0^{0,06} 100xdx = 100\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0.06} = 50\cdot 0.0036 = 0.18(Дж);$$

Пример 3. Сила 196,2 Н растягивает пружину на 18 см. Какую работу она производит?

Решение. По закону Гука $F = kx$, откуда

$$k = F/x = 196.2/0.18 = 1090\,(Н/м).$$

Значит, $F = 1090x$. Находим искомую работу по формуле (2):

$$A = \int_0^{0.18} 1090xdx = 1090\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0.18} \approx 545\cdot 0.18^2 \approx 17.7(Дж).$$

3. Площадь плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции aABb (рис.1), ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$, осью Ox, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

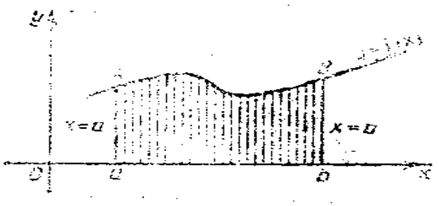


Рисунок 1

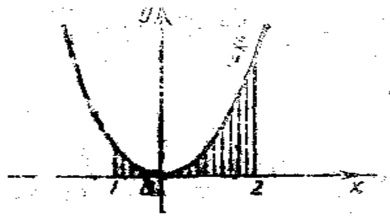


Рисунок 2

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью абсцисс (рис.2).

Решение. Применяя формулу (1) , получаем:

$$S = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{3}x^2 \Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(8-(-1)) = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3,$$

т.е. $S = 3$ кв.ед.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Найти путь тела, движущегося с заданной скоростью за данный промежуток времени.

2. Вычислить работу, совершаемую при сжатии или растяжении пружины, пропорционально приложенной силе.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

Вариант 1.

1. $V = 3t^2 + 4t - 1, t_1 = 0, t_2 = 4.$

2. $x_1 = 0,02 \text{ м}, A_1 = 30 \text{ Дж}, x_2 = 0,03 \text{ м}, A_2 - ?$

3. $x - y + 2 = 0, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 2.$

Вариант 2.

1. $V = t^2 - 8t + 2, t_1 = 0, t_2 = 3.$

2. $x_1 = 0,01 \text{ м}, F_1 = 10 \text{ Н}, x_2 = 0,08 \text{ м}, A_2 - ?$

3. $y = x^2 - 8x + 18, \quad y = -2x + 18.$

Вариант 3.

1. $V = 2t - 3, t_1 = 0, t_2 = 5.$

2. $x_1 = 0,03 \text{ м}, F_1 = 15 \text{ Н}, x_2 = 0,06 \text{ м}, A_2 - ?$

3. $x - y + 3 = 0, \quad x + y - 1 = 0, \quad y = 0.$

Вариант 4.

1. $V = 4\cos t, \; t_1 = \frac{\pi}{6}, t_2 = \frac{\pi}{2}.$

2. $x_1 = 0,01 \text{ м}, F_1 = 10 \text{ Н}, x_2 = 0,06 \text{ м}, A_2 - ?$

3. $y = x^2 + 1, \quad x = 0, \quad x = 3.$

Вариант 5.

1. $V = 3t^2 + 4, t_1 = 0, t_2 = 6.$

2. $x_1 = 0,02\ м,\ F_1 = 60\ Н,\ x_2 = 0,12\ м,\ A_2 - ?$

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 6.$

Вариант 6.

1. $V = 3t^2 - 2t, t_1 = 0, t_2 = 3$

2. $x_1 = 0,02\ м,\ A_1 = 16\ Дж,\ A_2 = 100\ Дж,\ x_2 - ?$

3. $y = -3x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$

Вариант 7.

1. $V = 4t - 3t^2, t_1 = 0, t_2 = 4.$

2. $x_1 = 0,05\ м,\ A_1 = 30\ Дж,\ x_2 = 0,08\ м,\ A_2 - ?$

3. $x - 2y + 4 = 0, \quad x + y - 5 = 0, \quad y = 0.$

Вариант 8.

1. $V = 3t^2 - 6t + 4, t_1 = 0, t_2 = 5.$

2. $x = 0,02\ м,\ F = 80\ Н,\ x_1 = 0,15\ м,\ x_2 = 0,2\ м,\ A - ?$

3. $y = -x^2 + 6x - 5, \quad y = 0.$

Вариант 9.

1. $V = 2\cos t, t_1 = \dfrac{\pi}{6}, t_2 = \pi.$

2. $x = 0,01\ м,\ F = 20\ Н,\ x_1 = 0,02\ м,\ x_2 = 0,04\ м,\ A - ?$

3. $x - 2y + 4 = 0, \quad 3x + 2y - 12 = 0, \quad y = 0.$

Вариант 10.

1. $V = t^2 - 4t + 3,\ t_1 = 0, t_2 = 6.$

2. $x = 0,01\ м,\ F = 50\ Н,\ x_1 = 0,02\ м,\ x_2 = 0,12\ м,\ A - ?$

3. $y = 6 - x, \quad y = x^2 + 4.$

Вариант 11.

1. $V = 3t^2 - 4t - 4, t_1 = 0, t_2 = 3.$

2. $x_1 = 0,05\ м,\ A_1 = 25\ Дж,\ x_2 = 0,1\ м,\ A_2 - ?$

3. $4y = x + 2, \quad y = 3 - x.$

Вариант 12.

1. $V = 6t + 3t^2, t_1 = 0, t_2 = 4.$

2. $x_1 = 0,04\ м,\ A_1 = 20\ Дж,\ A_2 = 80\ Дж,\ x_2 - ?$

3. $y = -x^2 + 5, \quad y = x + 3.$

Вариант 13.

1. $V = 8t^3 + 3t^2 - 1, t_1 = 0, t_2 = 5.$

2. $x_1 = 0,03\ м,\ A_1 = 30\ Дж,\ x_2 = 0,04\ м,\ A_2 - ?$

3. $y = -x, \quad y = 2 - x, \quad x = -2, \quad x = 4.$

Вариант 14.

1. $V = -2\sin t,\ t_1 = \dfrac{\pi}{3}, t_2 = \dfrac{\pi}{2}.$

2. $x_1 = 0,02\ м,\ F_1 = 40\ Н,\ x_2 = 0,05\ м,\ A_2 - ?$

3. $y = x^3 - 3x, \quad y = x.$

Вариант 15.

1. $V = 1 - 10t + 3t^2, t_1 = 0, t_2 = 6.$

2. $x_1 = 0,04\ м,\ F_1 = 20\ Н,\ x_2 = 0,06\ м,\ A_2 - ?$

3. $y = x, \quad y = 5 - x, \quad x = 1, \quad x = 2.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Как найти путь тела, движущегося с заданной скоростью за данный промежуток времени?

2. Запишите формулу работы, совершаемой при сжатии или растяжении пружины, пропорционально приложенной силе.

3. Сформулируйте правила вычисления площади фигуры, ограниченной заданными линиями?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 11

ОТНОШЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Цель:

-сформировать навыки задания множеств;

- развить умения устанавливать отношения множеств;

-закрепить знания о свойствах отношений.

Формируемые компетенции: ПК 1.6, ОК2 -7.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, чертёжные инструменты.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

На конкретных примерах покажем алгоритм выполнения операций над множествами, способы их заданий, установим отношения множеств.

Пример 1. Найти все подмножества множества А = { 1; 2; 3 }.

Решение: Данное множество состоит из 3-х элементов, n=3, значит, оно имеет $2^3=8$ подмножеств. Тогда подмножествами данного множества являются следующие множества:

{ 1 }, { 2 }, { 3 }, { 1; 2 }, { 1; 3 }, { 2; 3 }, { 1; 2; 3 }, {Ø}.

Пример 2. Определить все равные множеству A = {2,4,6,8} множества.

Решение: Множества называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов, причем порядок их расстановки не имеет значения. Множество A состоит из 4-ёх элементов, значит, число перестановок его элементов равно 4!= 1*2*3*4=24. Таким образом, множество A имеет 24 равных множества, включая его само: A_1={2,4,6,8}, A_2={2,4,8,6}, A_3={2,6,4,8}, A_4={2,6,8,4}, A_5={2,8,4,6}, A_6={2,8,6,4}, A_7={4,2,6,8}, A_8={4,2,8,6}, A_9={4,6,8,2}, A_{10}={4,6,2,8}, A_{11}={4,8,6,2}, A_{12}={4,8,2,6}, A_{13}={6,4,2,8}, A_{14}={6,4,8,2}, A_{15}={6,2,4,8}, A_{16}={6,2,8,4}, A_{17}={6,8,4,2}, A_{18}={6,8,2,4}, A_{19}={8,6,4,2}, A_{20}={8,6,2,4}, A_{21}={8,2,6,4}, A_{22}={8,2,4,6}, A_{23}={8,4,6,2},A_{24}={8,4,2,6}.

Пример 3. Указать характеристическое свойство элементов множества A ={12,22,32,42,52,62,72,82,92}.

Решение: Характеристическое свойство – свойство, которым обладает каждый элемент данного множества и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий.Все перечисленные элементы являются натуральными, двузначными и оканчиваются цифрой 2.

Задания для самостоятельного выполнения:

1) Найти все подмножества данного множества;
2) Определить все равные данному множеству множества;
3) Укажите характеристическое свойство элементов данного множества;

Вариант 1.

1. *A = { 1; 3; 7; 9 }.* 2. *A = { -3; -4; -5; -6 }.* 3. *A = { 11; 13; 15; 17;19 }.*

Вариант 2.

1. *A = { 3; 4; 5; 7 }.* 2. *A = { 3; 4; 6; 8 }.* 3. *A = { 21; 23; 25; 27;29 }.*

Вариант 3.

1. *A = { -1; -2; -3; -4 }.* 2. *A ={ 5; 1; 3; 6 }.* 3. *A ={ 18; 15; 12 }.*

Вариант 4.

1. *A = { -1; 0; 1; 2 }.* 2. *A = { 1; 2; 5; 8 }.*
3. *A ={ 10; 15; 20;25;30;35;40;45;50;55;60;65;70;75;80;85;90;95 }.*

Вариант 5.

1. *A = { 0; 1; 2; 6 }.* 2. *A = { 3; 1; 7; 9 }.* 3. *A = { 78; 76; 74; 72;70 }.*

Вариант 6.

1. *A = { 2; 6; 7; 8 }.* 2. *A = { 5; 2; 4; 3 }.* 3. *A = { 31; 33; 35; 37;39 }.*

Вариант 7.

1. *A = { 4; 6; 7; 9 }.* 2. *A = { 7; 9; 3; 5 }.* 3. *A = { 98; 96; 94; 92; 90 }.*

Вариант 8.

1. *A = { 1; 4; 5; 7; 9 }.* 2. *A = { 3; 5; 7; 9 }.* 3. *A ={ 20; 22; 24; 26; 28 }.*

Вариант 9.
1. $A = \{ 7; 8; 9; 3; 5 \}$. 2. $A = \{ 4; 6; 7; 9 \}$.
3. $A = \{ 11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99 \}$.
Вариант 10.
1. $A = \{ 5; 2; 4; 3; 7 \}$. 2. $A = \{ 2; 6; 7; 8 \}$. 3. $A = \{ 41; 43; 45;47;49 \}$.
Вариант 11.
1. $A = \{ 3; 1; 7; 9; 5 \}$. 2. $A = \{ 0; 1; 2; 6 \}$. 3. $A =\{ 60; 62;64; 66; 68 \}$.
Вариант 12.
1. $A = \{ 7; 2; 9; 5; 1 \}$. 2. $A = \{ -1; 0; 1; 2 \}$. 3. $A =\{ 27; 24; 21 \}$.
Вариант 13.
1. $A = \{ 5; 1; 3; 6; 8 \}$. 2. $A = \{ -1; -2; -3; -4 \}$. 3. $A =\{ 30; 32; 34; 36; 38 \}$.
Вариант 14.
1. $A = \{ 2; 3; 4; 6; 9 \}$. 2. $A = \{ 1; 2; 3; 4 \}$.
3. $A = \{ 111; 222; 333; 444; 555; 666; 777; 888; 999 \}$.
Вариант 15.
1. $A = \{ 6; 7; 1; 1/2; 1/3 \}$. 2. $A = \{ 3; 4; 5; 7 \}$.
3. $A = \{ 88; 86; 84; 82; 80 \}$.

Вопросы для самоконтроля:
1. Перечислите способы задания множеств.
2. Какие множества называют равными?
3. Что называют характеристическим свойством множества?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 12

ВЫПОЛНЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Цель:
- сформировать навыки выполнения операций над множествами;
- развить умения построения кругов Эйлера- Венна;
- закрепить знания об отношениях множеств.

Формируемые компетенции: ПК 1.6, ОК2, ОК3, ОК4, ОК7.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы, чертёжные инструменты.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:
1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

На конкретных примерах покажем выполнение операций над множествами, графическое изображение множеств с помощью диаграмм Эйлера.

Пример 1. Найдите:

$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A$, *если* $A = \{1;3;5;6\}, \quad B = \{1;3\}$.

Решение:

Находим:

$A \cup B = \{1;3;5;6\} \cup \{1;3\} = \{1;3;5;6\}$

$A \cap B = \{1;3;5;6\} \cap \{1;3\} = \{1;3\}$

$A \setminus B = \{1;3;5;6\} \setminus \{1;3\} = \{5;6\}$

$B \setminus A = \{\varnothing\}$.

Пример 2. Найти декартово произведение множеств A={1,2,3} и B = {3,5}.

Решение:

Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех пар, образованных из элементов обоих множеств, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая компонента принадлежит множеству B.

A × B= {(1;3),(1;5),(2;3),(2;5),(3;3),(3;5)}

A*B	**3**	**5**
1	**(1;3)**	**(1,5)**
2	**(2,3)**	**(2,5)**
3	**(3,3)**	**(3,5)**

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Изобразите на диаграммах Эйлера – Венна данные множества.

II. Выполните операции $A \cup B; \quad A \cap B; \quad A \setminus B; \quad B \setminus A$.

III. Найдите декартово произведение множеств $A \times B$.

Вариант 1.

1. $A \subset B, B \subset C$.
2. $A = \{ 3; 4; 5;7 \}, B = \{ 3; 5; 6 \}$.
3. $A = \{ 2; 3; 5; 6 \}, B = \{ 1; 2; 3 \}$.

Вариант 2.

1. $A \subset C, B \subset C, A \setminus B = \varnothing$.
2. $A=\{ 0; 1; 7; 8 \}, B=\{ -7; 0; 6; 9 \}$.
3. $A = \{ 1; 5; 7; 9 \}, B = \{ 4; 5; 7 \}$.

Вариант 3.

1. $A \subset C, B \subset C, C = A \bigcup B$.
2. $A=\{ 1; 3; 5; 7 \}, B=\{ 2; 4; 6; 8 \}$.
3. $A = \{ 2; 4; 6; 9 \}, B = \{ 5; 7; 8 \}$.

Вариант 4.

1. $A \subset C, B \subset C, A \bigcap B \neq \varnothing$.

2. $A=\{ 1; 2; 3 \}, B=\{ -1; 0; 2; 3 \}.$
3. $A = \{ 6; 3; 4; 8 \}, B = \{ 3; 2; 1 \}.$

Вариант 5.

1. $A\bigcap B\neq\varnothing, A\bigcap C\neq\varnothing, B\bigcap C\neq\varnothing, A\bigcap B\bigcap C\neq\varnothing.$
2. $A=\{ 1; 2; 3 \}, B=\{ 0; 1; 2; 3; 5 \}.$
3. $A = \{ 5; 6; 8; 9 \}, B = \{ 3; 1; 4 \}.$

Вариант 6.

1. $A\bigcap B=\varnothing, A\bigcap C=\varnothing, B\bigcap C\neq\varnothing.$
2. $A=\{ -3; -1; 0; 1\}, B=\{2; -1; -2 \}.$
3. $A = \{ 0; 1 \}, B = \{ -1; 0; 1; 2 \}.$

Вариант 7.

1. $C\subset D, D\subset E.$
2. $A=\{ -2; -1; 0; 1; 2 \}, B=\{ -1; 0; 4 \}.$
3. $A = \{ 6; 7; 9 \}, B = \{ 1; 2; 5; 7 \}.$

Вариант 8.

1. $C\subset E, D\subset E, C\setminus \mathrm{D}=\varnothing.$
2. $A=\{ 0; 1; 2; 3; 7 \}, B=\{ 5; 3; 1; 0 \}.$
3. $A = \{ 3; 6; 8 \}, B = \{ 6; 3; 2; 1 \}.$

Вариант 9.

1. $C\subset E, D\subset E, E=C\bigcup D.$
2. $A=\{ 1; 2; 3; 7 \}, B=\{0; 1; 3; 4 \}.$
3. $A = \{ 7; 8; 2; 1 \}, B = \{ 1; 2; 5; 7 \}.$

Вариант 10.

1. $C\subset E, D\subset E, C\bigcap D\neq\varnothing.$
2. $A=\{ 5; 7; 8 \}, B=\{ 8; 9 \}.$
3. $A = \{ -2; -1; 0; 6 \}, B = \{ 2; 3; 6 \}.$

Вариант 11.

1. $C\bigcap D\neq\varnothing, C\bigcap E\neq\varnothing, D\bigcap E\neq\varnothing, C\bigcap D\bigcap E\neq\varnothing.$
2. $A=\{ 5; 6; 7; 8; 9 \}, B=\{6; 8; 9 \}.$
3. $A = \{ -6; 1; 2; 7; 8 \}, B = \{ 3; 6; -4 \}.$

Вариант 12.

1. $C\bigcap D=\varnothing, C\bigcap E=\varnothing, D\bigcap E\neq\varnothing.$
2. $A=\{ 1; 2; 3; 4 \}, B=\{ 0; 1/2; 1\}.$
3. $A = \{ 4; 8; 2; 7 \}, B = \{ 1/3; 5; 1; 8 \}.$

Вариант 13.

1. $E\subset F, F\subset K.$
2. $A=\{ 3; 4; 5; 7 \}, B=\{0; 1; 4; 7\}$
3. $A = \{ 2; 7; 0; 8; 9 \}, B = \{ 5; 1; 2; 3 \}.$

Вариант 14.

1. $E \subset K, F \subset K, E \setminus F = \varnothing.$
2. *A={ 1/3; 4; 7; 9},B={ 6; 7; 9 }.*
3. *A = { -1; 0; 1; 2 }, B = { 5; 3; 4 }.*

Вариант 15.

1. $E \subset K, F \subset K, K = E \bigcup F.$
2. *A={1/6; 3; 4},B={1/6; 2; 3; 4}.*
3. *A = { 0; 1; 2; 5 }, B = { 3; 4; 6; 7 }.*

Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите основные операции над множествами.
2. Что изображают диаграммой Эйлера – Венна?
3. Дайте определение декартовому произведению множеств.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 13

РЕШЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Цель:

- сформировать навыки решения комбинаторных задач;
- развить умения вычисления комбинаторных соединений;
- закрепить знания об элементах комбинаторики.

Формируемые компетенции: ПК 2.2, ОК1, ОК3, ОК5, ОК9.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения: На основе конкретных примеров покажем способы вычисления перестановок, размещений, сочетаний, факториала.

Пример 1. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Решение:

Используем формулу вычисления: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Солдат в дозор можно выбрать $C_{80}^3 = \dfrac{80!}{3!(80-3)!} = \dfrac{80!}{3!77!} = 82160$ способами, а офицеров $C_3^1 = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$ способами. Так как с каждой командой из солдат может пойти любой офицер, то всего имеется 246480 способов.

Пример 2. Сколько двухзначных комбинаций можно составить из четырех букв *A, B, C, D*, при условии, что ни одна из них не повторяется?

Решение:

Так как двухзначные комбинации отличаются друг от друга или самими буквами, или их порядком, то искомое количество равно числу размещений из четырех элементов по два.

Число размещений вычислим по формуле:

$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots [n-(m-1)]$

Итак, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12.$ Всего имеется 12 различных комбинаций.

Пример 3. Сколькими способами можно расставить 6 различных книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение:

Если обозначить 4 определенные книги как одно целое, то получается 6 книг, которые можно переставлять способами. $P_6 = 6! = 1*2*3*4*5*6 = 720$

4 определенные книги можно переставлять способами $P_4 = 4! = 1*2*3*4 = 24$

Тогда всего перестановок по правилу умножения будет

$P_6 * P_4 = 720 * 24 = 17280.$

Задания для самостоятельного выполнения:

1-2. Решить комбинаторные задачи.

3. Найти корни уравнения.

Вариант 1.

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?
2. Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать?
3. Решить уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4.$

Вариант 2.

1. Сколькими способами могут разместиться 5 человек за столом?
2. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов?
3. Решить уравнение: $A_x^3 = 56x.$

Вариант 3.

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых чисел?
2. Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать?
3. Решить уравнение: $30A_{x-2}^4 = A_x^5.$

Вариант 4.

1. Бригадир должен отправить на работу бригаду из трех человек.

Сколько таких бригад можно составить из 8 человек?

2. На собрании должны выступать 5 человек (А, В, С, Д, Е). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если А должен выступать первым?

3. Решить уравнение: $A_{x+2}^4 = 30A_x^2$.

Вариант 5.

1. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?

2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «журнал»?

3. Решить уравнение: $20A_{x-2}^3 = A_x^5$.

Вариант 6.

1. Сколькими способами можно составить список из 6 человек?

2. Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может из своего состава выбрать председателя и секретаря?

3. Решить уравнение: $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$.

Вариант 7.

1. Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрами 3 и 5?

2. Сколькими способами можно выбрать различные краски из имеющихся пяти?

3. Решить уравнение: $A_{x-2}^3 = 4A_{x-3}^2$.

Вариант 8.

1. Сколькими различных трехзначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно составить из цифр 1, 2, 3,4 , 5, 6, 7, 8, 9?

2. При встрече 16 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

3. Решить уравнение: $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$.

Вариант 9.

1. Имеется 8 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

2. Сколькими способами можно разместить в четырехместной каюте четырех человек?

3. Решить уравнение: $C_{10}^{x-1} = 2C_{10}^x$.

Вариант 10.

1. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

2. В местком избрано 11 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя, секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

3. Решить уравнение: $A_x^4 = 15A_{x-2}^3$.

Вариант 11.

1. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 7?

2. Студенты данной группы изучают 8 учебных предметов. Если расписание занятий каждого дня включается по 4 предмета, то сколькими способами могут быть распределены предметы в день?

3. Решить уравнение: $A_x^5 = 30A_{x-2}^4$.

Вариант 12.

1. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

2. Сколькими способами можно разложить семь монет различного достоинства в два кармана?

3. Решить уравнение: $8C_{105}^{x} = 3C_{105}^{x+1}$.

Вариант 13.

1. Сколько различных диагоналей можно провести в выпуклом десятиугольнике?

2. Пять девушек и три юноши играют в баскетбол. Сколькими способами они могут быть разбиться на две команды по четыре игрока, если в каждой команде должно быть не менее одного юноши?

3. Решить уравнение: $A_{x+1}^4 = 5x(x+1)$.

Вариант 14.

1. Сколько может быть случаев при выборе двух карандашей и трех ручек из пяти различных карандашей и пяти различных ручек?

2. Укротителю диких зверей предстоит вывести на арену цирка одного за другим пять львов и четыре тигра. Сколькими способами он может это сделать, причем так, чтобы никакие два тигра не шли друг за другом?

3. Решить уравнение: $30x = A_x^3$.

Вариант 15.

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых чисел?

2. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены все возможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел?

3. Решить уравнение: $A_{2x}^3 = 14A_x^3$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется *n* – факториалом?

2. Перечислите основные виды комбинаторных соединений.

3. Запишите формулы вычислений перестановок, размещений, сочетаний.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 14

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Цель:

- сформировать навыки решения вероятностных задач;
- развить умения вычисления вероятностей совместных и несовместных, независимых событий;
- закрепить знания о теоремах сложения и умножения вероятностей.

Формируемые компетенции: ПК 2.2, ОК1, ОК3, ОК5, ОК7.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

На основе конкретных примеров покажем способы вычисления вероятностей события.

Пример 1.

В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение.

Общее число различных исходов есть n=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле P(A)=m/n, получим P(A)=200/1000=1/5=0,2.

Пример 2.

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Решение.

Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через A. Общее число случаев n=5+3=8. Число случаев m, благоприятствующих появлению события A, равно 3. По формуле P(A)=m/n получим P(A)=m/n=3/8=0,375.

Пример 3.

Из урны, в которой находится 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение.

Обозначим событие, состоящее в проявлении черного шара, через A. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: $n = C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$

Число случаев m, благоприятствующих событию A, составляет $m = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$

По формуле P(A)=m/n находим вероятность появления двух черных шаров: P(A)=m/n=28/190=14/95=0,147.

Пример 4.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Решение.

Пусть А- событие, состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3, а В- в том, что оно кратно 5. Найдем Р(А+В). Так как А и В совместные события, то воспользуемся формулой Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ).

Всего имеется 90 двузначных чисел: 10,11,…,98,99. Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют наступлению события А); 18- кратными 5 (благоприятствуют наступлению события В) и 6- кратными одновременно 3 и 5 (благоприятствуют наступлению события АВ). Таким образом, Р(А)=30/90=1/3, Р(В)=18/90=1/5, Р(АВ)=6/90=1/15, т.е. Р(А+В)=1/3+1/5-1/15=7/15=0,467.

Пример 5.

В одной урне находится 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение.

Пусть А - появление белого шара из первой урны, а В - появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события А и В независимы. Найдем Р(А) = 4/12=1/3, Р(В) = 3/12=1/4.

По формуле получим Р(АВ)=Р(А)*Р(В)=(1/3)*(1/4)=1/12=0,083.

Задания для самостоятельного выполнения:

Найти вероятности данных событий.

Вариант 1.

1. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди пяти наугад выбранных билетов два окажутся выигрышными?

2. На карточках разрезной азбуки написаны 32 буквы русского алфавита. 4 карточки вынимают наугад одну за другой и укладывают на стол в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово “Югра”?

Вариант 2.

1. Из шести одинаковых карточек разрезной азбуки: “а”, ”е”, ”м”,”н”,”о”, ”р” наудачу выбирают четыре карточки и складывают их в ряд в порядке их извлечения. Какова вероятность при этом получить слово “море”?

2. В партии из 15 деталей имеется 9 стандартных. Найдите вероятность того, что среди семи взятых наугад деталей 5 стандартных?

Вариант 3.

1. На шести одинаковых карточках написаны буквы “а”, ”в”, ”к”, ”м”,

”о”, ”с” . Карточки перемешивают и раскладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, чтобы получилось слово “Москва”?

2. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Найдите вероятность того, что среди двух взятых наугад деталей одна бракованная?

Вариант 4.

1. Из урны, содержащей 5 шаров с цифрами 1, 2, 3,4,5 извлекают наудачу все шары один за другим. Какова вероятность того, что номера извлеченных шаров идут в порядке возрастания?

2. Экзаменационные билеты пронумерованы числами от 1 до 35. Какова вероятность того, что номер выбранного билета нечётный?

Вариант 5.

1. В партии из 100 деталей 5 % бракованных. Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется стандартной?

2. Трехтомное собрание сочинений М.Ю. Лермонтова расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят по порядку номеров?

Вариант 6.

1. Из полного набора домино наудачу извлекают одну кость. Какова вероятность того, что число очков на ней четно?

2. Из 50 электролампочек имеется 4 бракованных. Какова вероятность того, что две взятые наугад лампы окажутся бракованными?

Вариант 7.

1. Из 60 экзаменационных вопросов учащийся подготовил 50. На экзамене он должен ответить на два вопроса. Какова вероятность того, что учащийся ответит на оба вопроса?

2. В книжном магазине на полке лежит 20 книг, причем 10 книг стоят по 20 руб. каждая, 3 книги - по 40 руб. и 7 книг - по 10руб. Найти вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 50 руб.?

Вариант 8.

1. Из 10 билетов лотереи выигрышными являются два. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов два выигрышных?

2. На пяти одинаковых карточках написаны буквы “е”,”т”,”н”, ”ь”, ”ф” . Карточки перемешивают и раскладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, чтобы получилось слово “нефть”?

Вариант 9.

1. В урне 100 шаров, помеченных номерами 1,2,3,…100. Из урны наугад выбирают один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара содержит цифру 5?

2. Задания программированной контрольной работы пронумерованы всеми двухзначными числами. Какова вероятность того, что номер наугад выбранного задания состоит из одинаковых цифр?

Вариант 10.

1. В урне 6 белых и 9 черных шаров. Из урны вынимают одновременно два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

2. На карточках разрезной азбуки написаны 32 буквы русского алфавита. Шесть карточек вынимают наугад одну за другой и укладывают на стол в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово “призма”?

Вариант 11.

1. В партии из 8 деталей имеется 6 стандартных. Какова вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей ровно 3 стандартных?

2. Четырехтомное собрание сочинений А.С. Пушкина расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят по порядку номеров?

Вариант 12.

1. Восемь различных книг расставляют наугад на одной полке. Какова вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом?

2. Экзаменационные билеты пронумерованы числами от 1 до 35. Какова вероятность того, что номер выбранного билета чётный?

Вариант 13.

1. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что два шара белые.

2. В книжном магазине на полке лежит 20 книг, причем 10 книг стоят по 20 руб. каждая, 3 книги - по 40 руб. и 7 книг - по 10руб. Найти вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 30 руб.?

Вариант 14.

1. В урне 8 красных и 5 синих шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что они разного цвета.

2. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет четное число очков?

Вариант 15.

1. Десять различных книг расставляют наугад на одной полке. Найдите вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными рядом.

2. В партии из 12 деталей имеется 9 стандартных. Найдите вероятность того, что среди семи взятых наугад деталей 6 стандартных?

Вопросы самоконтроля:

1. Что называется вероятностью события?
2. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
3. Приведите примеры совместных и несовместных, независимых событий;

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 15

РАСЧЕТ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Цель:

- сформировать навыки расчёта числовых характеристик случайной величины;

-развить умения обработки статистических данных;

-закрепить знания о характеристиках случайной величины.

Формируемые компетенции: ПК 2.2, ОК2, ОК3, ОК4, ОК9.

Материально – техническое обеспечение: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Выполнить задания;
3. Сделать вывод по работе;
4. Подготовить защиту работы по контрольным вопросам.

Краткие теоретические сведения:

Математическая статистика – это раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации, обработки и использования информации для получения научно обоснованных выводов и принятия верных решений. Важным этапом обработки статистических данных является подбор статистического распределения и вычисление числовых характеристик случайной величины, указывающих её среднее значение в результате проводимых испытаний или наблюдений.

Пример 1. Из генеральной совокупности произведена выборка. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

Таблица 1 – Выборочная совокупность

x_i	1	2	5	8
n_i	10	15	20	25

Найти выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Решение:

Выборочная средняя $\overline{x_в}$ вычисляется по формуле:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1\cdot 10 + 2\cdot 15 + 5\cdot 20 + 8\cdot 25}{70} = \frac{340}{70} \approx 4,86$$

Находим выборочную дисперсию:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 = \frac{10\cdot(1-4,86)^2 + 15\cdot(2-4,86)^2 + 20\cdot(5-4,86)^2 + 25\cdot(8-4,86)^2}{70} \approx$$

$$\approx \frac{519}{70} \approx 7,41$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \approx \sqrt{7,41} \approx 2,72$$

Находим оценки генеральных характеристик.

Улучшенная дисперсия (несмещенная оценка дисперсии):

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{70}{70-1} \cdot 7,41 \approx 7,52$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{7,52} \approx 2,74$$

Задания для самостоятельного выполнения:

По заданному закону распределения найти выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и дать оценку параметрам генеральной совокупности.

Вариант 1.

x_i	1	3	5	9
n_i	10	15	20	25

Вариант 2.

x_i	1	2	3	4
n_i	15	20	23	25

Вариант 3.

x_i	2	3	5	6
n_i	10	20	25	30

Вариант 4.

x_i	3	4	5	8
n_i	10	15	20	25

Вариант 5.

x_i	1	4	5	6
n_i	15	20	25	25

Вариант 6.

x_i	2	3	5	8
n_i	15	20	25	30

Вариант 7.

x_i	2	4	5	9
n_i	10	15	20	25

Вариант 8.

x_i	4	5	6	7
n_i	15	25	25	30

Вариант 9.

x_i	1	3	6	8
n_i	10	15	25	30

Вариант 10.

x_i	3	5	8	10
n_i	10	15	20	25

Вариант 11.

x_i	2	4	6	8
n_i	15	15	25	25

Вариант 12.

x_i	1	2	5	8
n_i	5	10	15	20

Вариант 13.

x_i	4	6	8	10
n_i	10	15	25	30

Вариант 14.

x_i	2	3	6	8
n_i	10	20	25	30

Вариант 15.

x_i	3	7	9	10
n_i	5	15	25	35

Вопросы самоконтроля:

1. Что такое генеральная и выборочная совокупности?
2. Дайте определение статистическому распределению выборки.
3. Запишите формулы вычисления математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.
4. Дайте определение среднего квадратического отклонения случайной величины.
5. Как производятся расчёты оценок генеральных характеристик?

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Электронные учебные издания основной литературы:

1. Башмаков М. И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования – М.: Академия, 2015 – 256 с. [Электронный ресурс; Режим доступа http://www.academia-moscow.ru]
2. Высшая математика: учебник и практикум для СПО / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общ. ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — М.: Издательство Юрайт, 2016. — 472 с. — (Профессиональное образование) [Электронный ресурс; Режим доступа https://www.biblio-online.ru]

Печатные учебные издания дополнительной литературы:

3. Григорьев В. П. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф.образования - М.: Академия, 2013 – 320 с.
4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров – М.: Юрайт, 2013 – 479 с.
5. Гмурман В.Е., Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для бакалавров – М.:Юрайт,2013 – 404 с.
6. Кытманов А. М. Математический анализ: учеб. пособие для бакалавров / под общ. ред. А. М. Кытманова – М.: Юрайт, 2012 – 607 с.
7. Кремер Н. Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум – М.: Юрайт, 2014 – 307 с.
8. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс – М.: Айрис-пресс, 2013 – 608 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

21.00.00 ПРИКЛАДНАЯ ГЕОЛОГИЯ, ГОРНОЕ ДЕЛО, НЕФТЕГАЗОВОЕ ДЕЛО И ГЕОДЕЗИЯ

специальность

21.02.10 Геология и разведка нефтяных и газовых месторождений

Методические указания к выполнению практических занятий для обучающихся 2 курса очной формы обучения образовательных организаций среднего профессионального образования

Методические указания к выполнению практических занятий
разработал преподаватель: Карсакова Елена Николаевна

Подписано к печати ***19.12.2017 г.*** Объем ***3,8*** п.л.
Формат 60х84/16 Заказ
Тираж ***1 экз.***

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет»
НИЖНЕВАРТОВСКИЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИКУМ (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Югорский государственный университет»
628615 Тюменская обл., Ханты-Мансийский автономный округ,
г. Нижневартовск, ул. Мира, 37